Tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan - problemas

(1) Uma part. de spin 1 e uma de spin 2 estão em repouso, em um estado tal que o spin total é 3 e seu componente S_z é $\hbar$. Se medirmos o componente z da part. de spin 2, que valores podemos ter, e com qual probabilidade?

(2) Escreva a matriz unitária de coeficientes de Clebsch-Gordan que leva a base $\{|m_1, m_2\rangle\}$ na base $\{|j, m\rangle\}$, para o caso de um spin 1 e um spin $\frac{1}{2}$.

Atividade - coeficientes de Clebsch-Gordan

Problema 1: Do enunciado $\begin{cases} j=3 & m=1 \\ j_1=2 & j_2=1 \end{cases}$

Olho a tabela $j_1=2, j_2=1$, procurando a expansão na base $|m_1\, m_2\rangle$ do estado $|j=3, m=1\rangle$ - veja coluna

		3
		+1
2	-1	1/15
1	0	8/15
0	+1	6/15

$$\Rightarrow \underset{j\ m}{|3\ 1\rangle} = \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,\underset{m_1\ m_2}{|2,-1\rangle} + \sqrt{\tfrac{8}{15}}\,\underset{m_1\ m_2}{|1,0\rangle} + \sqrt{\tfrac{6}{15}}\,\underset{m_1\ m_2}{|0\ {+1}\rangle}$$

$\Rightarrow$ tenho $m_2 = -1$ com prob $\frac{1}{15}$ $\Rightarrow$ medida de J_z dá $-\hbar$

$m_2 = 0$ $\quad \frac{8}{15} \Rightarrow 0$

$m_2 = 1$ $\quad \frac{6}{5} \Rightarrow \hbar$

Problema 2: É um jeito de tabelar na matriz 6×6 os coeficientes da tabela $1\times\frac{1}{2}$. Note que vários são $=0$, por isso a tabela não é 6×6, e sim uma "tirinha" na diagonal.

Cuidado com a escolha dos índices das linhas e colunas da matriz. Uma escolha possível é: (m_1, m_2)

$j\ m$	$1\ \frac{1}{2}$	$1\ {-\frac{1}{2}}$	$0\ \frac{1}{2}$	$0\ {-\frac{1}{2}}$	$-1\ \frac{1}{2}$	$-1\ {-\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}$						
$\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$						
$\frac{3}{2}\ {-\frac{1}{2}}$						
$\frac{3}{2}\ {-\frac{3}{2}}$						
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$						
$\frac{1}{2}\ {-\frac{1}{2}}$						

Operadores escalares e vetoriais [Cohen-Tannoudji B_{VI}]

- Operadores se transformam sob rotações:

$$A \to D(R)\, A\, D^\dagger(R)$$

- No caso de rotação infinitesimal:

$$A \to \left(1 - i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\delta\phi\right) A \left(1 + i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\delta\phi\right) = A - \frac{i}{\hbar}\delta\phi\left[\vec{J}\cdot\hat{n}, A\right]$$

- Operadores escalares são aqueles que não mudam com rotação

$A \to A$. Isso acontece se $\underline{[\vec{J}\cdot\hat{n}, A] = 0}$

$\Rightarrow$ op. escalares comutam com os 3 componentes do momento angular.

Ex: J^2, $\vec{R}\cdot\vec{P}$, H.

Operadores vetoriais

- Um vetor em física clássica é uma quantidade com 3 componentes que se transforma sob rotações assim: $V_i \to \sum_j R_{ij} V_j$ ← MATRIZ de rotação 3×3

- Em mecânica quântica, operadores vetoriais $\vec{V}$ devem ter seus valores esperados transformados da mesma forma que vetores em física clássica.

- Como $|\alpha\rangle \to D(R)|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\alpha|V_i|\alpha\rangle \to \langle\alpha|D^\dagger(R) V_i D(R)|\alpha\rangle$

$$= \sum_j R_{ij}\langle\alpha|V_j|\alpha\rangle$$

Como isso vale para qualquer $|\alpha\rangle$, operadores vetoriais são aqueles que satisfazem

$$D^\dagger(R) V_i D(R) = \sum_j R_{ij} V_j$$

- Vamos considerar rotações infinitesimais: $D(R) = 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\vec{J}\cdot\hat{n}$

$$\Rightarrow D^\dagger(R)V_i D(R) = \underbrace{\left(1 + \frac{i\varepsilon\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\right)V_i\left(1 - \frac{i\varepsilon\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\right)}_{V_i + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_i, \vec{J}\cdot\hat{n}]} = \sum_j R_{ij}(\hat{n},\varepsilon)V_j$$

No caso de $\hat{n} = \hat{z}$:

$$R(\hat{z},\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} x: & V_x + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_x, J_z] = V_x - \varepsilon V_y \\ y: & V_y + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_y, J_z] = \varepsilon V_x + V_y \\ z: & V_z + \frac{\varepsilon}{i\hbar}[V_z, J_z] = V_z \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [V_x, J_z] = -i\hbar V_y \\ [V_y, J_z] = i\hbar V_x \\ [V_z, J_z] = 0 \end{cases}$$

Considerando rotações infinitesimais em torno de $\hat{x}$ e $\hat{y}$ encontramos:

$$\boxed{[V_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k} \quad (I)$$

- Podemos usar a propriedade (I) acima como a definição de operador vetorial.

- As relações de comutação de grandezas vetoriais ((I)) foram obtidas usando rotações infinitesimais, mas servem p/ determinar o comportamento de $\vec{V}$ sob rotações finitas:

$$\exp\left(\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\right)V_i\exp\left(-\frac{iJ_j\phi}{\hbar}\right)$$

$\leftarrow$ Usando BHC isso se reduz a calcular $[J_j,[J_j, \cdots [J_j,V_i]\cdots]]$ onde cada comutador é proporcional a V_i ou V_k ($k \neq i,j$).

- Todos os operadores vetoriais que conhecemos devem satisfazer (I):
  - $\vec{J}$: óbvio (relação de comutação fundamental do momento angular)
  - $[y, L_z] = i\hbar x$

    $[x, L_z] = -i\hbar y$
  - $[p_x, L_z] = -i\hbar p_y$

    $[p_y, L_z] = i\hbar p_x$

  etc, como pode ser facilmente verificado.

— || —

Elementos de matriz de op. escalares e vetoriais

Escalares

- Vimos que escalares comutam com J_x, J_y e J_z, e portanto também com J_+, J_-, J^2.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{se } A \text{ é escalar} \\ A = a\mathbb{1} \end{array}\right) \Rightarrow \langle jm | A | j'm' \rangle = \langle jm | a\mathbb{1} | j'm' \rangle = a\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

ou seja, a maior parte dos elementos de matriz de A são 0

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{bloco } (2j+1)\times(2j+1)$$

- Isso é consequência do comportamento de A sob rotações. Vejamos agora o que podemos dizer dos elementos de matriz de operadores vetoriais.

Operadores vetoriais [Cohen-Tannoudji D_X]

- Temos $J_\pm = J_x \pm i J_y$. Para um op. vetorial $\vec{V}$, definimos
$$V_\pm = V_x \pm i V_y .$$

- Como $\vec{V}$ é vetorial, sei que: $[V_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k$

$$\Rightarrow \begin{cases} [J_x, V_\pm] = \underbrace{[J_x, V_x]}_{0} \pm i \underbrace{[J_x, V_y]}_{-i\hbar V_z} = \mp \hbar V_z \quad \text{e similarmente} & \text{(I)} \\ [J_y, V_\pm] = -i\hbar V_z & \text{(II)} \\ [J_z, V_\pm] = \pm \hbar V_\pm & \text{(III)} \end{cases}$$

- Com essas relações de comutação, podemos calcular aquelas entre $J_\pm$ e $V_\pm$:

$$\begin{cases} [J_+, V_+] = \underbrace{[J_x, V_+]}_{-\hbar V_z} + i \underbrace{[J_y, V_+]}_{+ i \cdot (-i\hbar V_z)} = 0 & \text{(IV)} \\ [J_+, V_-] = 2\hbar V_z & \text{(V)} \\ [J_-, V_+] = -2\hbar V_z & \text{(VI)} \\ [J_-, V_-] = 0 & \text{(VII)} \end{cases}$$

• Vamos precisar deste teorema:

Se 2 observáveis comutam, e se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são 2 autovetores de A com autovalores diferentes, então o elemento de matriz $\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$.

Prova: $A|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$ $\quad$ $A(B|\psi_2\rangle) = B\underbrace{A|\psi_2\rangle}_{a_2|\psi_2\rangle} = a_2(B|\psi_2\rangle)$

$A|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$

$\Rightarrow B|\psi_2\rangle$ é ~~autovetor~~ de A com autovalor a_2.

$\Rightarrow B|\psi_2\rangle$ é $\perp$ a $|\psi_1\rangle$

$\Rightarrow \langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$

• Agora vamos provar que as relações de comutação que encontramos significam que vários elementos de matriz de $\vec{V}$ são nulos.

• $[V_z, J_z] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle j\,m|\,V_z\,|j'm'\rangle = 0 \text{ se } m \neq m'.}$ (pelo teorema acima).

• Elementos de matriz de $V_\pm$:

Relação III, p. 32: $[J_z, V_\pm] = \pm\hbar V_\pm \quad \Rightarrow \quad J_z V_\pm = V_\pm J_z \pm \hbar V_\pm \quad [\,\cdot\,|j'm'\rangle]$

$\Rightarrow J_z(V_\pm|j'm'\rangle) = V_\pm J_z|j'm'\rangle \pm \hbar V_\pm|j'm'\rangle$

$= (m'\pm 1)\hbar(V_\pm|j'm'\rangle)$

$\Rightarrow V_\pm|j'm'\rangle$ é autovetor de J_z com autovalor $(m'\pm1)\hbar$

$\Rightarrow \boxed{\langle j\,m|\,V_\pm\,|j'm'\rangle = 0 \text{ se } m \neq m'\pm 1}$

° Resumindo: para elementos de matriz diferentes de zero precisamos:

$\underline{V_z}$: $\Delta m = m - m' = 0$

$\underline{V_+}$: $\Delta m = m - m' = +1$

$\underline{V_-}$: $\Delta m = m - m' = -1$

REGRAS DE SELEÇÃO para V_z, $V_\pm$.

$\Rightarrow$ em cada subespaço com j fixo ($\dim \mathcal{H} = 2j+1$) temos que V_z é op. diagonal, e $V_\pm$ só tem elementos de matriz $\neq 0$ logo acima e abaixo da diagonal.

Relação entre elementos de matriz do $\vec{J}$ e $\vec{V}$

- Temos que $[J_+, V_+] = 0$ $\quad [\cdot |jm\rangle]$ $\quad [\langle j m+2| \cdot]$

$$\Rightarrow \langle j, m+2| J_+ \underset{\wedge}{} V_+ |j, m\rangle = \langle j, m+2| V_+ \underset{\wedge}{} J_+ |j m\rangle$$

$$\mathbb{1} = \sum_{j'm'} |j'm'\rangle\langle j'm'| \qquad \mathbb{1}$$

- Aparecem os elementos de matriz de J_+, que só são $\neq 0$ se $\begin{cases} j = j' \\ m = m' + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \langle j, m+2| J_+ |j, m+1\rangle \langle j, m+1| V_+ |j m\rangle$$

$$= \langle j, m+2| V_+ |j, m+1\rangle \langle j, m+1| J_+ |j m\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\langle j, m+1| V_+ |j m\rangle}{\langle j, m+1| J_+ |j m\rangle} = \frac{\langle j, m+2| V_+ |j, m+1\rangle}{\langle j, m+2| J_+ |j, m+1\rangle}$$

(Válido desde que os bras e kets existam)

- Variando os m's, vemos que a razão acima é sempre a mesma:

$$\langle j, m+1| V_+ |j m\rangle = \alpha_+(j) \langle j, m+1| J_+ |j m\rangle$$

↳ Depende de j, mas não de m.

- Já encontramos a regra de seleção p/ V_+: $\Delta m = m - m' = +1$. Então a relação acima é válida p/ qualquer m, m'.

$$\boxed{\langle j, m| V_+ |j m'\rangle = \alpha_+(j) \langle j, m| J_+ |j m'\rangle}$$

← com j fixo, elementos de matriz de V_+ são proporcionais aos de J_+.

- Um argumento análogo mostra que

$$\boxed{\langle j, m| V_- |j m'\rangle = \alpha_-(j) \langle j m| J_- |j m'\rangle}$$

Idem p/ V_-, J_-.

∘ Para relacionar V_z com J_z, usamos $[J_-, V_+] = -2\hbar V_z$ "ensanduichado" entre $\langle jm|$ e $|jm\rangle$:

atua com $J_+|jm\rangle$

$$-2\hbar\langle jm|V_z|jm\rangle = \langle jm|(J_-V_+ - V_+J_-)|jm\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\langle j, m+1|V_+|jm\rangle - \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle jm|V_+|j, m-1\rangle$$

∘ Usando $\langle jm|V_+|jm'\rangle = \alpha_+(j)\langle jm|J_+|jm'\rangle$

$$\Rightarrow \langle jm|V_z|jm\rangle = -\frac{1}{2}\alpha_+(j)\Big[\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\langle j, m+1|J_+|jm\rangle - \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle jm|J_+|j\,m-1\rangle\Big]$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\alpha_+(j)\Big[\underbrace{\cancel{j(j+1)} - m(m+1) - \cancel{j(j+1)} + m(m-1)}_{-2m}\Big]$$

$$= m\hbar\,\alpha_+(j)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle jm|V_z|jm\rangle = m\hbar\alpha_+(j) \\ \langle jm|V_z|jm\rangle = m\hbar\alpha_-(j) \end{cases}$$ e argumento semelhante leva a

$\Rightarrow$ 2 conclusões:

① $\alpha_+(j) = \alpha_-(j) = \alpha(j)$ são o mesmo coeficiente, e

② $\langle jm|V_z|jm'\rangle = \alpha(j)\langle jm|J_z|jm'\rangle$ ← elemento de matriz de V_z é proporcional a J_z

①, junto com a proporcionalidade de elementos de matriz de V_+ e J_+, resulta em:

③ $\langle jm|\vec{V}|jm'\rangle = \alpha(j)\langle jm|\vec{J}|jm'\rangle$ (também p/ V_x e V_y).

ou seja, com j fixo, todos os elementos de matriz de qualquer operador vetorial $\vec{V}$ são proporcionais aos de $\vec{J}$ - Teorema de Wigner-Eckart p/ operadores vetoriais.

- Operar com j fixo corresponde a projetar no sub-espaço $\mathcal{H}$ com j fixo, de dimensão $2j+1$. Seja P_j o operador de projeção nesse subespaço:

$P_j = \sum_m |jm\rangle\langle jm|$. Então o teorema de Wigner-Eckart:

$\langle jm|\vec{V}|jm'\rangle = \alpha(j)\langle jm|\vec{J}|jm'\rangle$ (com j fixo) pode ser reescrito como:

$$P_j \vec{V} P_j = \alpha(j)\, P_j \vec{J} P_j \quad (*)$$

CALCULANDO A constante de proporcionalidade

- Considere o escalar $\vec{J}\cdot\vec{V}$. Sua restrição a j fixo é $P_j(\vec{J}\cdot\vec{V})P_j$
- É fácil mostrar que $[\vec{J}, \hat{P}_j] = 0$ $\left[\text{Basta mostrar que } [J_z, P_j]|jm\rangle = 0,\ [J_\pm, P_j]|jm\rangle = 0\right]$

$$\Rightarrow P_j \vec{J}\cdot\vec{V} P_j = \vec{J}\cdot\underbrace{(P_j \vec{V} P_j)}_{\alpha(j) P_j \vec{J} P_j} = \alpha(j)\, J^2 P_j = \alpha_j\, j(j+1)\hbar^2 P_j$$

- Se $|\psi_j\rangle$ está no subespaço com j fixo:

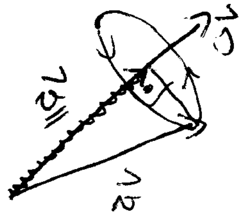
$$\langle \vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_j = \langle\psi_j|\vec{J}\cdot\vec{V}|\psi_j\rangle = \alpha_j\, j(j+1)\hbar^2$$

$$\Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle\vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_j}{j(j+1)\hbar^2}$$ Subst. em $(*)$ acima. Temos então que, no subespaço com j fixo,

$$\boxed{\vec{V} = \frac{\langle\vec{J}\cdot\vec{V}\rangle_j}{j(j+1)\hbar^2}\,\vec{J}}$$ $\Leftarrow$ Teorema da projeção.

• Interpretação clássica dessa propriedade:

• Se $\vec{J}$ é o momento angular de um sist. isolado, todas as grandezas vetoriais $\vec{v}$ rodam ao redor de $\vec{J}$ fixo:



• A média temporal de $\vec{v}$ anula qualquer componente que não seja aquela $\vec{v}_{\parallel}$ paralela a $\vec{J}$. Essa componente é

$$\boxed{\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{J}\cdot\vec{v}}{J^2}\,\vec{J}}$$ ← Análogo ao que encontramos na MQ.

— || —

• Há grandezas importantes que não são vetores ou escalares (os tensores), mas não os estudaremos aqui. O teorema de Wigner-Eckart pode ser estendido p/ tensores, o que nos ajuda a calcular elementos de matriz de operadores tensoriais.